VII Тензорска анализа

Метрички простори

Нека се у посматраном n-димензионом простору може дефинисати тзв. метрика простора. То је унапријед задани закон по коме се тачкама $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(x^1+dx^1, x^2+dx^2, \ldots, x^n+dx^n)$ придружује један скалар ds који дефинише растојање између њих. По аналогији са тродимензионим Еуклидовим простором, метрика се дефинише квадратном формом облика

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j \quad \ldots (1)$$

сумирање по i и j, а коефицијенти g_{ij} могу бити неке ф-је положаја

за коју се захтијева да остане инваријантна при трансформацији координата $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Ова квадратна форма је метричка форма, а тако дефинисан простор је Риманов простор.

→ из примера да је скуп производа контраваријантних вектора $V^i V^j$ је контраваријантни тензор!!

Пошто је ds^2 по дефиницији скалар, а производ $dx^i dx^j$ двапута контраваријантни ~~вектор~~ тензор, према закону количника закључујемо да скуп коефицијената g_{ij} представља двапут коваријантни тензор.

<u>Доказ:</u> $\bar{ds}^2 = \bar{g}_{ij}\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j \overset{\text{јер је } ds^2 \text{ скалар}}{=} g_{kl}\, dx^k dx^l = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot d\bar{x}^i \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$, одакле је:

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl} \quad \dots (2)$$

Ако у изразу $g_{ij}\, dx^i dx^j$ замијенимо индексе добијамо $g_{ji}\, dx^j dx^i$, па видимо да је $g_{ij} = g_{ji}$, тј. тензор g_{ij} је симетричан. Његова шема је:

јер је: $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ и $ds^2 = g_{ji}\, dx^j dx^i$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad \dots (3)$$

→ ово је метрички или фундаментални тензор.

Ако метрика простора има облик:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2 \quad \dots (4)$$

или ако се неком трансформацијом координата може свести на тај облик, посматрани простор се назива Еуклидов. Тада је $g_{ij} = 0$ за $i \neq j$ и $g_{ij} = 1$, за $i = j$, тј.

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \dots (5)$$

Двапут коваријантни и двапут контраваријантни симболи δ_{ij} и δ^{ij} у Еуклидовом простору имају тензорски карактер. У n-димензионом афином простору је δ^i_j мјешовити тензор док се симболи δ_{ij} и δ^{ij} могу формално увести али немају тензорски карактер.

__Пример 1.__ Скуп свих тачака на површини сфере полупречника R у тродимензионом Еуклидовом простору. Овај скуп дефинише један подпростор Еуклидовог простора, чије су тачке одређене сферним координатама $x^1=\theta$ и $x^2=\varphi$, а метричка форма због $r=R=const$ овде је: → једначина (3.18)

$$ds^2=\cancelto{0}{dr^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2=R^2d\theta^2+R^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \quad --(6)$$

$$\underline{ds^2=(d\theta)^2+(d\varphi)^2}$$

Ова форма се никаквом трансформацијом не може свести на облик (4), па посматрани скуп тачака представља нееуклидски Риманов простор, а метрички тензор је облика:

$$\begin{pmatrix} \overset{g_{11}}{R^2} & \overset{g_{12}}{0} \\ \overset{g_{21}}{0} & \overset{g_{22}}{R^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

__Пример 2.__ Четвородимензиони простор са правоуглим коорд. $x^\lambda\ (\lambda=1,2,3,4)$, дефинисан метриком:

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(dx^4)^2 \quad --(7)$$

уз услов да је овај израз инваријантан. Овакав простор је такође нееуклидски Риманов простор и од значаја је у спец. теорији релативности, а његов метрички тензор је:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad --(8)$$

Примјетимо да трансформацијом $\bar{x}^\rho=x^\rho\ (\rho=1,2,3)$, $\bar{x}^4=ix^4$, где је $i=\sqrt{-1}$, метрика овог простора постаје еуклидска, али саме координате постају комплексне. Наиме,

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-(i\,dx^4)^2 \quad ---(9)$$

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2$$

↓

Коњуговани метрички тензор је други контраваријантни метрички тензор. Пишемо га у облику:

$$g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k \quad --- (10); \qquad g^{ij} = \frac{G(i,j)}{g}$$

кофактор g_{ij} у det; g је det

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

За $i=k$ на десној страни имамо скалар, а пошто је скуп g_{ij} коваријантни тензор, на основу закона количника закључујемо да скуп g^{ij} представља други контраваријантни тензор. Он се назива коњуговани метрички тензор.

Закон трансформације метричког тензора g_{ij} је:

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl} \quad --- (11)$$

Ако формирамо детерминанту са елементима на обема странама једначине, помоћу множења детерминанти добијамо: $|\bar{g}_{ij}| = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right| \left|\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right| |g_{kl}|$

$$\bar{g} = |\bar{g}_{ij}| = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right|^2 g \quad --- (12)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{vmatrix}$$

Јакобијан инверзне трансф. коорд.

Одавде се види да је детерминанта g релативни скалар тежине 2.

Скаларни производ

У Римановом метричком простору може се поред метрике простора увести и операција скаларног множења на следећи начин: за два контраваријантна вектора A^i и B^i ова операција се деф.

$$(A,B) = g_{ij} A^i B^j \quad --- (13) \rightarrow \text{сумирање по } i \text{ и } j$$

Ово је скаларни производ вектора A^i и B^i и не зависи само од датих вектора већ и од метрике самог простора. Зато је он важна карактеристика простора. Сада се метричка форма (1) може приказати у облику скаларног производа вектора dx^i са самим собом:

$$ds^2 = (dx, dx) \quad --- (14), \text{ где је:}$$

$$(dx, dx) = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Доказ: $(\bar{A},\bar{B}) = \bar{g}_{ij}\bar{A}^i\bar{B}^j = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}A^mB^n \Rightarrow (\bar{A},\bar{B}) = g_{kl}A^kB^l = (A,B)$

Напоменимо да у ма ком метричком простору, где се метрика дефинише на описани, симетрични начин од (1), није увек дефинисан и скаларни производ. Уколико је овај појам уведен, то је онда <u>Хилбертов простор</u>. <u>По својој природи скаларни производ је заиста скалар, тј. при ма каквој трансформацији коорд. остаје инваријантан.</u>

У случају Еуклидовог простора, где су коеф. метричког тензора дати са (5), скаларни производ се своди на:

$$(A,B) = \delta_{ij}A^iB^j \overset{(\ast)}{=} A^1B^1 + A^2B^2 + \dots + A^nB^n \quad \text{--(16)}$$

Ово је генерализација уобичајеног скаларног производа у тродим. Еуклидовом простору.

<u>Дужина и угао</u>

Помоћу појма скаларног производа, који је инваријантан, могу се увести појмови дужине и угла. Ако уочимо неки контраваријантни вектор A^i, интензитет вектора A, аналогно са класичном теоријом вектора, дефинише се као:

$$A^2 = (A,A) = g_{ij}A^iA^j \quad \text{--(17)}$$

За два контраваријантна вектора A^i и B^i угао између вектора α дефинише се обрасцем који је генерализација скаларног производа у тродим. Еуклидовом простору

$$\cos\alpha = \frac{(A,B)}{A\cdot B} = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\cdot\sqrt{g_{ij}B^iB^j}} \quad \text{--(18)}$$

Ако је скаларни производ два вектора 0, тада $\cos\alpha = 0$ и тада кажемо да су ови вектори <u>ортогонални</u>.

Пример → за простор са метриком (7) квадрат интензитета се своди на чисто квадратне чланове $(A,A) = g_{ij}A^iA^j = \underbrace{g_{11}}_{1}A^1A^1 + \underbrace{g_{22}}_{1}A^2A^2 + \underbrace{g_{33}}_{1}A^3A^3 \underbrace{g_{44}}_{-1}A^4A^4$

$$A^2 = (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2 \quad \text{--- (19)}$$

$$B^2 = (B^1)^2 + (B^2)^2 + (B^3)^2 + (B^4)^2$$

а косинус угла између вектора је:

$$\cos\alpha = \frac{A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 - A^4B^4}{A \cdot B} \quad (20)$$

где се величине A и B налазе по формули (19).

Елемент запремине → да бисмо дошли до инваријантне вел. која представља генерализацију елемента запремине, полазимо од (12) и пишемо ову релацију у облику:

$$\sqrt{\bar{g}} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right| \sqrt{g} \quad \text{--- (21)}$$

(12) $\bar{g} = |\bar{g}_{ij}| = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right|^2 \cdot g$

$g = |g_{ij}|$ → дет. од коваријантног метричког тензора

С друге стране, према правилу за смену променљивих из математичке анализе биће

$$d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^n = \left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| dx^1 dx^2 \ldots dx^n$$

па множењем ових израза добијамо

$$\underbrace{\sqrt{\bar{g}}\, d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^n}_{d\bar{V}} = \underbrace{\sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n}_{dV} \quad \text{--- (22)}$$

Одавде закључујемо да израз $dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n$ --- (23) остаје инваријантан при ма каквим трансформацијама координата и назива се елемент запремине у Римановом простору. У случају Еуклидовог простора и правоуглих коорд. је $g = 1$, чиме добијамо уобичајени израз за елемент запремине.

јер је $g_{ij} = \delta_{ij}$, па је $g = |\delta_{ij}| = 1$